

فصل دوم

مدلسازی به روش تحلیلی

✓ تعریف سیستمهای آنالوگ

✓ مراحل مدلسازی تحلیلی

✓ مدلسازی سیستمهای آنالوگ

✓ بررسی عوامل غیر خطی در مدلسازی

✓ سیستمهای فشرده و گسترده

مقدمه:

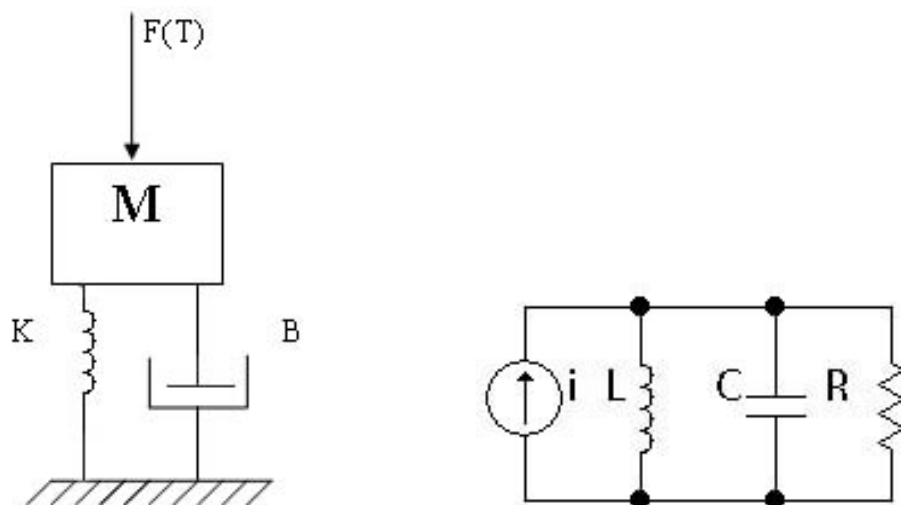
همانطور که در فصل قبل اشاره گردید، روشهای تحلیلی در شرایطی قابل استفاده است که اطلاعات کاملی از سیستم و اجزاء آن در اختیار باشد (White Box). در این فصل ابتدا به بررسی مدلسازی به روش تحلیلی و مراحل آن می پردازیم و سپس این روش را برای سیستمهای آنالوگ با ارائه مثالهایی توضیح می دهیم. در نهایت به بررسی عوامل غیرخطی در سیستم که باید در مدلسازی مورد توجه باشند می پردازیم.

۱-۲ تعریف سیستمهای آنالوگ

سیستمهای آنالوگ یا مشابه، به سیستمهای دینامیکی گفته میشود که از نظر فیزیکی متفاوت بوده لیکن روابط حاکم بر سیستم و نیز ارتباطات اجزاء آن مشابه باشند، بعنوان مثال مدل ریاضی (مانند تابع تبدیل) آنها یکسان باشد. فرضا تابع تبدیل زیر:

$$\frac{1}{S^2 + S + 1}$$

که نمایانگر یک سیستم دینامیکی درجه یک می باشد میتواند تحقق الکتریکی، مکانیکی، ... داشته باشد. همانطور که در شکل (۱-۲) مشاهده می شود، دو سیستم الکتریکی و مکانیکی دارای تابع تبدیل مشابه فوق می باشند.



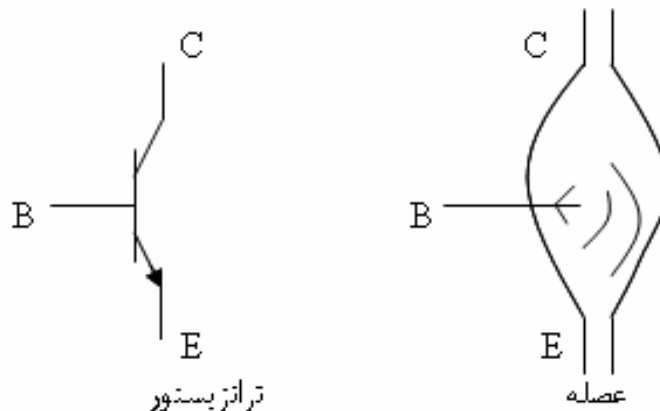
شکل ۱-۲ مقایسه دو سیستم مشابه الکتریکی و مکانیکی که در آن $M=K=B=R=L=C=1$

مثال دیگر که مقایسه ای بین ترانزیستور و عضله است در مثال ۲-۱ مشاهده میشود.

مثال ۲-۱):

از نظر فیزیک عملکرد میتوان عضله و ترانزیستور را که هر دو بنحوی در تقویت سیگنال مشارکت دارند را مقایسه نمود (شکل ۲-۲).

ترانزیستور عموماً سیگنال ورودی را توسط بیس (پایه B) در یافت میکند و این سیگنال باعث تغییرات جریان کلکتور-امیتر (C-E) خواهد شد که بمراتب جریان و انرژی بیشتری نسبت به سیگنال ورودی دارد. منبع تامین انرژی خروجی باتری یا منبع تغذیه DC می باشد. بطور مشابه، عضله سیگنالهای الکتریکی تحریک را توسط فیبرهای عصبی دریافت نموده که نتیجه آن انقباض عضله یعنی تولید نیروی کششی بین دو سر آن (C-E) می باشد انرژی لازم برای این انقباض و کار احتمالی انجام یافته توسط انرژی حاصل از سوخت و ساز سلولی فراهم می آید. البته تفاوتی از نظر فیزیکی و نیز تبدیل انرژی میتوان در این دو مشاهده نمود. مثلاً، در ترانزیستور انرژی ورودی و خروجی هر دو الکتریکی بوده لیکن در مورد عضله انرژی ورودی الکتریکی (الکتروشیمیایی) و انرژی خروجی مکانیکی است. لیکن علیرغم مکانیزم کار متفاوت در هر یک، ارتباط ورودی و خروجی (که ممکن است یک ضریب ثابت یا یک مدل دینامیکی فرض شود) در هر دو یکسان است.



شکل ۲-۲ تشابه سیستم ترانزیستور با عضله

در بخشهای بعدی در مورد تشابهات بین سیستمهای آنالوگ توضیحات بیشتری داده خواهد شد.

۲-۲ مراحل مدلسازی تحلیلی:

مراحل مدلسازی به روش تحلیلی را می توانیم به صورت زیر خلاصه کنیم:

۱- تعیین ورودی (ها) - خروجی (ها):

اولین مرحله در مدلسازی تحلیلی تعیین متغیرهای ورودی و خروجی در سیستم می باشد. برای مثال در مدلسازی عضله ورودی (ها) میتواند سیگنالهای الکتریکی ناشی از نرونهای حرکتی α یا γ ، و خروجی طول یا نیروی عضله باشد. لازم به یادآوری است که تغییر ورودی و یا خروجی باعث تغییر مدل (تابع تبدیل) میشود.

۲- تعیین متغیرهای اصلی و ثانویه:

متغیرهای اصلی هر زمینه علمی یا سیستم فیزیکی (مانند مدارات الکتریکی و یا سیستمهای سیالاتی، ..) گاهی بعنوان متغیرهای عبوری و عرضی نامیده میشود
(الف) متغیر عبوری (**Through Variable**) :

این متغیر خود بتهایی مفهومی فیزیکی داشته و نیاز به مرجع مقایسه ندارد مانند جریان الکتریکی که از یک سیم عبور میکند یا جریان خونی که در رگها جاری است.

(ب) متغیر عرضی (**Cross Variable**):

متغیری است که احتیاج به یک مرجع مقایسه نیاز دارد و عموماً اختلاف آن در دو سر المان اهمیت داشته و اندازه گیری میشود مانند اختلاف پتانسیل (ولتاژ) در مدارهای الکتریکی و یا اختلاف فشار خون در قلب یا عروق.

با تعریف متغیرهای عبوری و عرضی می توان متغیرهای ثانویه را تعریف نمود که وابسته هستند به پارامترهای فیزیکی ماده یا المان که از آنها عموماً بعنوان امپدانس یاد میشود. امپدانسها کمیتهای فیزیکی هستند که بصورتهای مختلف با تغییر وضعیت (مثلاً عبور

جریان الکتریکی، یا تغییر موقعیت یک عضو بدن، مخالفت می نمایند. مانند مقاومت اهمی، سلف، خازن (R,L,C) در مدارهای الکتریکی؛ و دمپر، فنر و جرم در سیستمهای مکانیکی (B,K,M). R و B معرف عنصر مصرف کننده (تلف کننده) انرژی، و باقی المانها ذخیره کننده انرژی هستند. تفاوت المانهای ذخیره کننده انرژی در نوع انرژی است که در آنها ذخیره میشود. در خازن، انرژی الکتریکی (در غالب میدان الکتریکی)، در سلف انرژی مغناطیسی (ناشی از جریان الکتریکی)، در فنر انرژی پتانسیل، و در جرم انرژی جنبشی ذخیره میشود.

۳- نوشتن روابط ریاضی و دینامیکی سیستم:

در این مرحله روابط متغیرهای اصلی با متغیرهای ثانویه را برای اجزاء مختلف سیستم می نویسیم. برای مثال روابط بین ولتاژ و جریان (متغیرهای اصلی) برای المانها الکتریکی مقاومت، خازن و سلف بقرار زیر است:

$$R = \frac{V}{I}$$

$$I = C \frac{dV}{dt}$$

$$V = L \frac{dI}{dt}$$

در این روابط، R مقاومت، C ظرفیت، L اندکتانس سلفی، V ولتاژ دو سر المان و I جریان عبوری از المان میباشد.

در ادامه روابط حاکم بر سیستم نوشته میشود. این روابط بر اساس قانونهای شناخته شده ایست که در حوزه مربوطه اثبات شده یا بعنوان یک اصل پذیرفته شده اند. برای مثال به قوانین حلقه و گره (kvl و kcl) در مدارهای الکتریکی، و اصل بقاء انرژی، اندازه حرکت، قانون اول و دوم نیوتن در سیستم های مکانیکی میتوان اشاره نمود.

حاصل نوشتن روابط ریاضی برای اجزاء سیستم دینامیکی و قوانین حاکم بر سیستم مجموعه ای است از معادلات دیفرانسیل. علاقه ما معمولاً در این مجموعه به رابطه ورودی - خروجی است. درجه معادلات دیفرانسیل به تعداد المانها مستقل ذخیره

کننده انرژی بر میگردد. ساده کردن این معادلات جهت حذف متغیرهای واسطه و پیدا نمودن رابطه بین ورودی و خروجی قدم بعدی است.

به عنوان مثال برای سیستم درجه دوم مکانیکی شکل ۲-۱ میتوان با استفاده از قانون دوم نیوتن و روابط امپدانسهای مکانیکی معادله دیفرانسیل سیستم را بصورت زیر نوشت:

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t)$$

۴-خطی سازی معادلات غیر خطی:

اگر اجزاء غیر خطی در سیستم وجود داشته باشند، سعی میشود در محدوده قابل قبولی (حول نقطه کار) آنها را خطی کرد. اساساً میتوان تصور کرد که تمام قطعات و المانها یک سیستم غیر خطی هستند و تفاوت بین این المانها در محدوده خطی بودن آنهاست. در برخی از شرایط مانند یک مقاومت الکتریکی، ناحیه خطی بسیار گسترده بوده و در برخی شرایط دیگر مانند ترانزیستور یا شیرهای هیدرولیکی، ناحیه خطی محدودتر است. در برخی از المانها یا سیستمها ناحیه خطی بقدری کوچک است که در عمل تقریب خطی آن قابل استفاده نمی باشد. مانند سیستمهای آئرو دینامیک. در اینصورت مدل خطی کارائی لازم را نداشته و لازم است که از مدل‌های غیرخطی استفاده شود. هر چند در آینده اشاره های مختصری به مدل‌های غیر خطی خواهد شد، لیکن بحث مشروح در این رابطه خارج از حوصله این مجموعه میباشد.

برای خطی سازی معادلات دینامیکی یک سیستم میتوان از بسط تیلور بصورت زیر استفاده کرد.

اگر تابعی به صورت $y=f(x)$ داشته باشیم، که در آن f تابعی غیر خطی از متغیر x است. تقریب خطی این تابع حول نقطه کار x_0 با استفاده از بسط تیلور به صورت زیر است:

$$y = f(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} + \dots$$

اگر $x - x_0 = \Delta x$ کوچک باشد، توانهای بالا تر از یک Δx را می توان صرف نظر کرد. در این حالت تقریب تابع بصورت $y = y_0 + K\Delta x$ خواهد شد. در این رابطه ضریب ثابت k برابر است با شیب تابع f در نقطه کار x_0 یعنی:

$$k = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

اگر تابعی از چند متغیر داشته باشیم:

$$y=f(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

مشتق نسبی به صورت ذیل گرفته می شود:

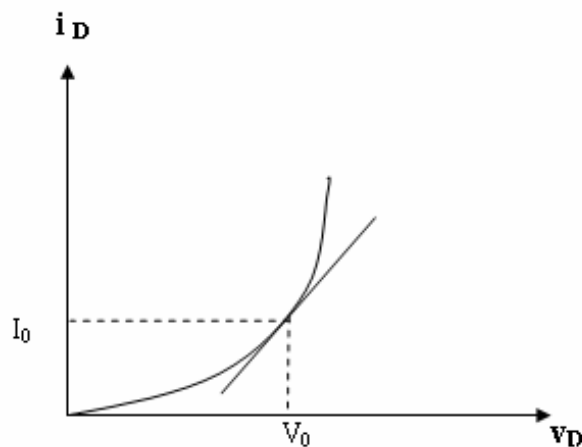
$$y = y_0 + (x_1 - x_{10}) \left. \frac{df}{dx_1} \right|_{x_1=x_{10}} + (x_2 - x_{20}) \left. \frac{df}{dx_2} \right|_{x_2=x_{20}} + \dots$$

که تقریب خطی آن بر حسب ورودیهای مختلف x_1, x_2, x_3, \dots بصورت زیر خواهد بود:

$$y = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + \dots$$

در سیستمهایی که به شدت غیر خطی بوده و یا محدوده تغییرات ورودی وسیع باشد ممکن است که مشخصه سیستم با چند قطعه خط تقریب زده شود.

برای مثال میتوان پیدا کردن مدل خطی یک ترانزیستور، حول نقطه کار برای ورودی های کوچک - سیگنالهای ورودی کمتر از ۲۴ میلی ولت- را در نظر گرفت (شکل ۲-۳). روش بدست آوردن این مدل در مثال ۲-۲ توضیح داده میشود.



شکل ۲-۳ خطی سازی در محدوده ای مشخص

مثال ۲-۲):

رابطه ریاضی غیر خطی برای ورودیها و خروجی های ترانزیستور بصورت زیر است:

$$v_B = f_1(i_B, v_C)$$

$$i_C = f_2(i_B, v_C)$$

در این رابطه، v_B ولتاژ بیس-امیتر، v_C ولتاژ کلکتور، i_B جریان بیس، i_C جریان کلکتور است. می خواهیم با استفاده از روش فوق مدار معادل خطی ترانزیستور را بدست آوریم.

راه حل:

تقریب خطی معادلات فوق با استفاده از بسط تیلور بصورت خواهد بود:

$$\Delta v_B \cong \left. \frac{\partial f_1}{\partial i_B} \right|_{V_{CQ}} \Delta i_B + \left. \frac{\partial f_1}{\partial v_C} \right|_{I_{BQ}} \Delta v_C$$

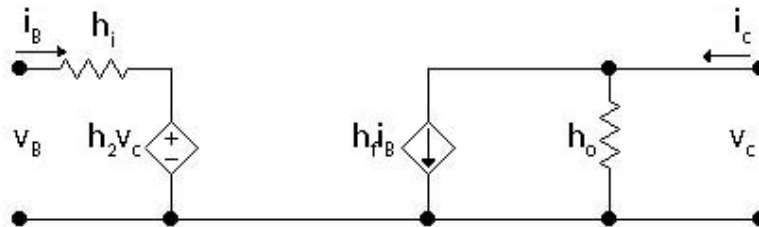
$$\Delta i_C \cong \left. \frac{\partial f_2}{\partial i_B} \right|_{V_{CQ}} \Delta i_B + \left. \frac{\partial f_2}{\partial v_C} \right|_{I_{BQ}} \Delta v_C$$

با جایگزینی ضرائب مشتق با پارامترهای ثابت میتوان معادلات فوق را بصورت زیر باز نویسی کرد:

$$\Delta v_B = h_i \Delta i_B + h_2 \Delta v_C$$

$$\Delta i_C = h_f \Delta i_B + h_o \Delta v_C$$

مدل ریاضی خطی شده فوق را میتوان جهت سهولت در استفاده در قالب مدارشکل ۲-۴ نمایش داد. این مدل عموماً در محاسبات مدارهای الکترونیکی بکار گرفته میشود.



شکل ۲-۴ مدل خطی سیگنال کوچک ترانزیستور

۶- تبدیل معادلات دیفرانسیل به جبری (تبدیل لاپلاس):

بعد از خطی سازی دسته معادلات دیفرانسیل، برای بدست آوردن رابطه ورودی-خروجی سیستم بهتر است که از تبدیل لاپلاس استفاده نمود. این تبدیل به ما اجازه می دهد که معادلات دینامیکی دیفرانسیل را به معادلات جبری تبدیل نمائیم که حل آنها بسیار راحت تر است.

عموماً در محاسبه تابع تبدیل (نسبت خروجی به ورودی در حوزه لاپلاس) شرایط اولیه سیستم برابر صفر فرض می شود. در صورتیکه شرایط اولیه مخالف صفر باشد باید این مقادیر شرایط اولیه در هنگام انجام تبدیل منظور گردد.

مثال ۲-۳):

برای معادله دینامیکی سیستم مکانیکی شکل ۲-۱ تبدیل لاپلاس با در نظرگرفتن شرایط اولیه بصورت زیر خواهد بود:

$$M \ddot{X}(t) + B \dot{X}(t) + Kx(t) = F(t)$$

$$M = B = K = 1$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + sX(s) - x(0) + X(s) = F(s)$$

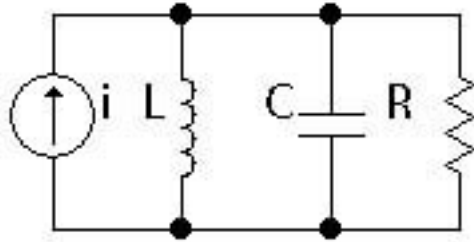
$$\Rightarrow s^2 X(s) - sx_0 - v_0 + sX(s) - x_0 + X(s) = F(s)$$

۷- بدست آوردن رابطه ورودی-خروجی(تابع تبدیل):

در آخرین مرحله تابع تبدیل سیستم را با ساده سازی دسته معادلات بدست آمده در مرحله قبل محاسبه می نمائیم.

مثال ۲-۴):

برای مدار درجه دوم الکتریکی شکل ۲-۵ یک مدل ریاضی بنویسید که ورودی آن منبع جریان و خروجی آن جریان سلف باشد.



شکل ۲-۵ مدار الکتریکی مرتبه دوم

حل:

$$v_L = v_C = v_R = v$$

$$i = i_C + i_R + i_L$$

$$i = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + i_L$$

$$i = C \frac{d(L \frac{di_L}{dt})}{dt} + \frac{L \frac{di_L}{dt}}{R} + i_L$$

$$i = LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L$$

$$\Rightarrow I = LCs^2 I_L + \frac{L}{R} s I_L + I_L \Rightarrow \frac{I_L}{I} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

۳-۲ مدل سازی سیستمهای آنالوگ:

همانطور که قبلا گفته شد، سیستمهای آنالوگ به سیستمهایی گفته می شود که روابط و رفتاری مشابه دارند لیکن از نظر فیزیکی متفاوتند. این سیستمها دارای طیف بسیار وسیعی از سیستمهای الکتریکی، مکانیکی (اعم از حرکتی، هیدرولیکی، حرارتی، ..)، ترافیکی، شیمیایی، مغناطیسی، ترمودینامیکی تا سیستمهای اقتصادی، اجتماعی، بیولوژیکی، روانپزشکی... را شامل می شود. در اینجا با ذکر چند مثال ارتباطات بین برخی سیستمهای آنالوگ را بیشتر توضیح می دهیم.

لازم به توضیح است که با توجه به اینکه سیستمهای فیزیکی در بیشتر مواقع مانند سیستمهای بیولوژیکی بصورت ترکیبی از سیستمهای مختلف می باشند که هر یک نیازمند تخصصهای خود است، آشنائی با این سیستمها و نقاط اشتراک آنها و نیز تبدیل آنها به یک

فرم یکنواخت و یکسان (مانند مدل‌های ریاضی) که قابل فهم برای سایر متخصصین دیگر نیز بوده و در ترکیب نمودن زیر سیستمها سهولت ایجاد نماید بسیار لازم و ضروری است. بعنوان مثال اگر یک بلندگو را به عنوان سیستم ترکیبی در نظر بگیریم، این سیستم از اجزاء (زیر سیستمهای) مغناطیسی، الکتریکی، و مکانیکی تشکیل یافته است که با توجه به ماهیتهای متفاوت زیر سیستمها اگر از روشی مشترک (مانند روشهای ریاضی) برای تلفیق و فهم آنها استفاده نشود، ترکیب کلی سیستم کار ساده ای نخواهد بود.

۱) سیستم های الکتریکی:

در این حالت متغیرهای اصلی عبارتند از ولتاژ (متغیر عرضی) - جریان (متغیر عبوری)؛ و متغیرها ثانویه (امپدانسها) عبارتند از مقاومت، سلف، و خازن. در این قسمت بدلیل سابقه دانشجویان در تحلیل مداری الکتریکی از توضیح بیشتر صرف نظر می شود.

۲) سیستمهای مکانیکی:

الف) سیستمهای حرکتی - انتقالی:

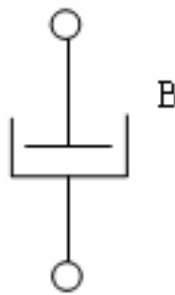
در این اینگونه سیستمها متغیرهای اصلی عبارتند از: سرعت (عرضی) - نیرو (عبوری) و متغیرهای ثانویه (امپدانسهای مکانیکی) عبارتند از: دمپر، فنر و جرم. البته میتوان در مقایسه شباهتهای بین سیستمهای حرکتی و الکتریکی از تشابه سرعت-ولتاژ استفاده نمود یا از تشابه سرعت-جریان. در این دو حالت مدارهای معادل سیستم مکانیکی که بدست می آید، دوال یکدیگر خواهند بود. ترجیح این مورد عموماً با انتخاب اول یعنی سرعت-ولتاژ است که سهولت بیشتری را در تبدیل سیستماتیک سیستمهای حرکتی به مدارهای الکتریکی ایجاد می نماید. امپدانسهای مکانیکی-حرکتی که عموماً استفاده می شوند عبارتند از:

۱-دمپر: دمپر عنصر مکانیکی است که نیروی تولیدی آن مرتبط است با سرعت. بصورت:

$$F_B = f(v)$$

در حالت کلی این رابطه (f) ممکن است رابطه ای غیر خطی باشد، بعنوان مثال اصطکاک کولمبی یا هنگامیکه سرعت جسم متحرک (مانند هواپیما) بسیار بالا باشد. مقاومت هوا (آب) که نیروی دمپری ایجاد می کند در سرعتهای پایین مثلا زیر ۲۵۰ کیلومتر، با سرعت متناسب است (دمپر خطی). چنانچه سرعت افزایش یابد این نیرو با توانهای دوم و بالاتر ارتباط پیدا می کند (دمپر غیر خطی). مثال دیگر از دمپر، ترمزهای مغناطیسی است که در آن نیروی ترمزی (دمپری) متناسب است با سرعت حرکت. در (شکل ۲-۶) شمائی از نمایش دمپر نشان داده شده است. رابطه ریاضی برای یک دمپر خطی یا خطی شده به صورت زیر برقرار است:

$$F_B = B.(\Delta V)$$



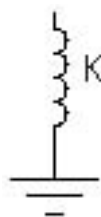
شکل ۲-۶ دمپر

یکی از عوامل مهم در تعیین ضریب دمپینگ مقدار ویسکوزیته (لزجت) سیال است . مانند ضریب ویسکوزیته روغنی که در کمک فنر های اتومبیل استفاده می شود. هر چقدر ضریب ویسکوزیته بیشتر باشد، ضریب دمپر B بیشتر خواهد بود و برعکس.

در مقایسه با المانهای الکتریکی دمپر معادل خواهد بود با مقاومت اهمی. هر دو این المانها تلف کننده انرژی بوده و ارتباط متغییر عرضی (ولتاژ و سرعت) با متغییر عبوری (جریان و نیرو) رابطه ای استاتیکی و تناسبی است (شرایط خطی).

باید توجه نمود که در تعریف مقاومت و دمپر، ضریب دمپر معادل خواهد بود با عکس مقاومت (یعنی هدایت) این نکته در محاسبه مدار معادل یک سیستم مکانیکی-حرکتی باید مورد توجه قرار گیرد.

۲- فنر: فنر (شکل ۷-۲) ذخیره کننده انرژی پتانسیل است و به ویژگیهای الاستیسیته مواد و المانها (مثلا دیوار رگها) مرتبط می شود.



شکل ۷-۲ فنر

برای یک فنر ایده آل نیروی فنر با مقدار تغییر طول آن متناسب است. در صورتی که به رابطه بین نیرو (متغییر عرضی) و سرعت (متغییر طولی) علاقمند باشیم، این رابطه یک رابطه دینامیکی خواهد شد:

$$F = K(\Delta X)$$

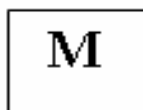
$$F = K \int \Delta v dt$$

$$\Delta v = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$$

در مقایسه با المانهای الکتریکی، رابطه ریاضی فنر یادآور سلف است. با این تفاوت که ضریب فنر معکوس مقدار اندوکتانس است. همانگونه که در مورد دمپر و مقاومت اشاره گردید.

$$L \Rightarrow \frac{1}{K}$$

۳- جرم: جرم (شکل ۸-۲) المان دیگر مکانیکی است که قادر است انرژی را بصورت جنبشی در خود ذخیره نماید.



شکل ۸-۲ جرم

رابطه نیرو با سرعت برای جرم نیز رابطه ای دینامیکی است که با استفاده از قانون دوم نیوتن براحتی می تواند بدست آید:

$$F = Ma = M \frac{dV}{dt}$$

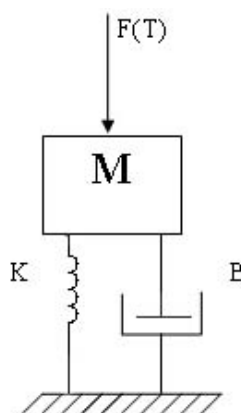
مقایسه با امپدانسهای الکتریکی نمایانگر این نکته است که میتوان جرم را متناظر با خازن در نظر گرفت. روابط ریاضی هر دو متناظر است.

در مورد جرم و خازن ارتباط بطور مستقیم برقرار است و نه معکوس (مانند دمپر و فنر). دلیل این مطلب را می توان به صورت زیر توضیح داد که چون مقاومت و سلف ماهیت مقاومتی دارند باید معکوس شوند، لیکن ماهیت ظرفیت (خازن) هدایتی است. به همین علت است که در محاسبه راکتانس (مقاومت) خازن، از معکوس ظرفیت استفاده می شود.

در هنگام بررسی سیستمهای مکانیکی، مشابه با مدارهای الکتریکی، برخی از اجزاء و المانها ممکن است بصورت سری یا موازی با یکدیگر ترکیب شوند. در این صورت باید توجه داشت که مبنای سری و موازی بودن بترتیب یکسان بودن متغیرهای عبوری و عرضی است و شکل فیزیکی اتصالات مبنای قضاوت نمی باشد.

مثال ۲-۵):

برای سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۹ یک مدل ریاضی (تابع تبدیل) را بدست آورده و مدار معادل الکتریکی آنرا رسم کنید.



شکل ۲-۹ مربوط به مثال ۲-۵

حل:

دیاگرام آزاد سیستم مکانیکی را مطابق شکل ۲-۱۰ رسم می کنیم. سپس با استفاده از قانون نیوتن روابط بین اجزاء سیستم را نوشته و در نهایت رابطه ورودی و خروجی را با استفاده از تبدیل لاپلاس محاسبه می کنیم.

$$\sum F = M \ddot{X}(t)$$

$$F(t) - F_k - F_B = M \ddot{X}(t)$$

$$M \ddot{X}(t) + B \dot{X}(t) + Kx(t) = F(t)$$

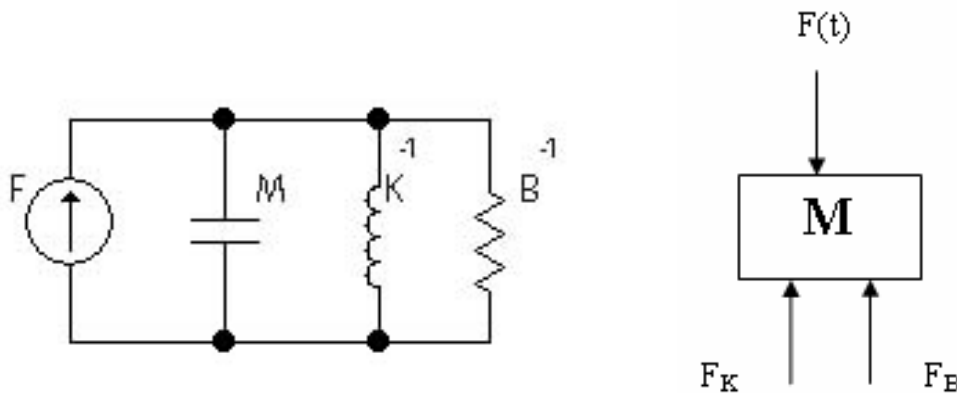
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + BS + K}$$

برای رسم مدار معادل الکتریکی از روابط تناظر گفته شد بین اجزاء و نحوه اتصال آنها می توان استفاده کرد (دقت شود که چون تمام جرم دارای یک سرعت است پس تمام خازنهای معادل آنها در مدار الکتریکی معادل به زمین وصل می شوند).

$$M \rightarrow C$$

$$B \rightarrow R^{-1}$$

$$K \rightarrow L^{-1}$$



شکل ۲-۹ دیاگرام آزاد مربوط به حل مثال ۲-۵ و مدار الکتریکی آن

ب) سیستمهای حرکتی - دورانی:

متغیرهای اصلی و ثانویه در سیستمهای دورانی مشابه است با متغیرهای تعریف شده در سیستمهای حرکتی - انتقالی است با این تفاوت که در سیستمهای دورانی ممان اینرسی جایگزین جرم، گشتاور جایگزین نیرو، سرعت زاویه ای جایگزین سرعت خطی، زاویه جایگزین فاصله، ... خواهد شد. بنابراین متغیرهای اصلی سرعت زاویه ای (عرضی) - گشتاور (عبوری) بوده و متغیرهای ثانویه (امپدانسها) عبارتند از: دمپر، فنر پیچشی، و ممان اینرسی. تناظر موجود بین این امپدانسها و امپدانسهای الکتریکی مشابه مطالب ذکر شده در حرکت انتقالی است. یعنی: K^{-1}, J, B^{-1} به ترتیب مفاومت

$$T_K = K\Delta\theta = K \int \Delta w dt$$

، ممان و سلف هستند.

$$T_B = B.\Delta w$$

$$T_J = J. \frac{dw}{dt}$$

ترانسفورماتور، چرخ دنده و اهرم:

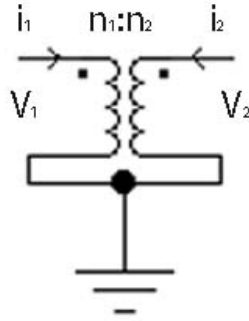
بعنوان مثالی دیگر از تناظر بین سیستمهای الکتریکی و مکانیکی - حرکتی میتوان به ترانسفورماتور اشاره کرد. ترانسفورماتور مبدلی است که ولتاژ (متغیر عرضی) و جریان (متغیر عبوری) را به یکدیگر تبدیل می کند. برای ترانسفورماتور ایده آل (بدون تلفات) توان ورودی و خروجی برابر بوده و می توان با توجه به شکل ۲-۱۰ نوشت:

$$P_1 = P_2 \quad \text{با فرض راندمان } 100\%$$

$$V_1 i_1 = V_2 i_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{i_2}{i_1} = \frac{1}{n}$$

در اینجا، n عبارتست از نسبت تبدیل ترانسفورماتور که برابر است با نسبت تعداد دور سیم پیچ اولیه به تعداد دور سیم پیچ ثانویه.

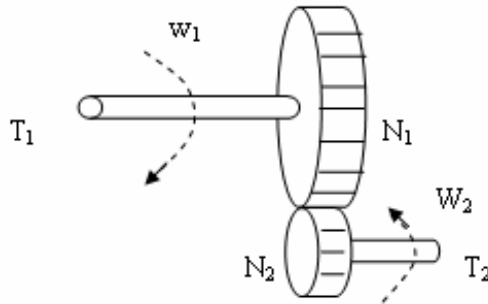


شکل ۲-۱۰ ترانسفورماتور

مشابه رابطه ترانسفورماتور را میتوان برای چرخ دنده در سیستم حرکتی دورانی نوشت. در این صورت نسبت تبدیل چرخ دنده بستگی خواهد داشت به شعاع چرخها و یا تعداد دنده های موجود در هر چرخ دنده. ضمناً یادآوری می شود که مقدار گشتاور هر چرخ متناسب است با تعداد دنده های آن. روابط متناظر برای چرخ دنده ایده آل (بدون تلفات) (شکل ۲-۱۱) بصورت زیر است:

$$P_1 = P_2$$

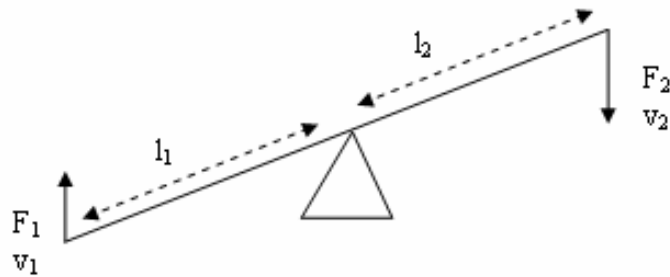
$$T_1 \cdot \omega_1 = T_2 \cdot \omega_2 \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{N_2}{N_1} = n$$



شکل ۲-۱۱ چرخ دنده

همچنین برای اهرم ها (شکل ۲-۱۲) رابطه گشتاور بصورت ذیل است:

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = T_2 \\ F_1 l_1 = F_2 l_2 \\ \frac{V_2}{V_1} = \frac{l_2}{l_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1} = n$$



شکل ۱۲-۲ اهرم

مشاهده می شود که معادل الکتریک اهرم، ترانس می باشد.

سیستمهای سیالاتی در سیستمهای مهندسی و بیولوژیکی از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند. سیال عامل در این سیستمهای ممکن است بصورت مایع- سیستمهای هیدرولیکی- (مانند سیستم گردش خون) و یا گاز (مانند سیستم تنفسی) باشند. هر چند که سیستمهای گازی یا هیدرولیکی دارای شباهتهای زیادی به یکدیگرند، لیکن تفاوتها مهم و قابل توجهی بین آنها وجود دارد که در هنگام مدلسازی باید به آنها توجه کرد. در ادامه در مورد سیستمهای هیدرولیکی توضیح بیشتری داده خواهد شد.

ج) سیستمهای سیالاتی-هیدرولیک:

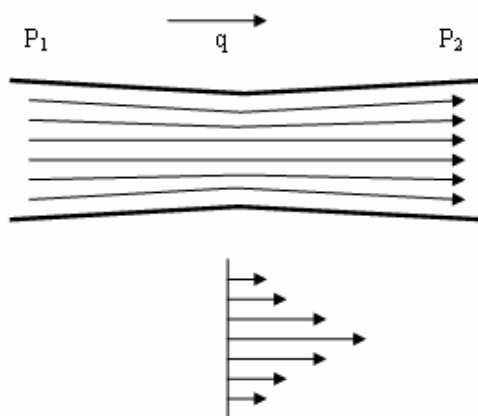
همانطور که اشاره شد در سیستمها سیال عامل مایع است. بسته به شرایط این مایع و خصوصیات فیزیکی آن مانند ویسکوزیته، تقسیم بندی های متفاوتی برای سیستمهای هیدرولیکی می توان در نظر گرفت که در هنگام مدلسازی باید به آن توجه نمود. مانند مایعات یک فازه (مانند آب) یا مایعات چند فازه (مانند خون)، یا مایعات نیوتنی و مایعات غیر نیوتنی.

در سیستمهای هیدرولیکی متغیرهای اصلی فشار مایع (متغیر عرضی) ، و دبی مایع (متغیر عبوری) هستند. که دبی می تواند حجمی و یا جرمی باشد که معمولا استفاده از دبی حجمی رایج تر است. متغیرهای ثانویه (امپدانسهای هیدرولیکی) عبارتند از:

مقاومت هیدرولیکی (اوریفیس) مانند شیر های آب، خازن هیدرولیکی مانند مخازن آب یا نفت، سلف هیدرولیکی (Inertance) مانند جرم آب.

۱-مقاومت هیدرولیکی: مقدار مقاومت هیدرولیکی وابسته است به شکل جریان مایع (لایه ای یا مغشوش)، به مایع انتقال یافته (آب، نفت، روغن، ..)، و مسیر جریان (لوله، ..). برای جریانهای کم ممکن است شکل جریان بصورت لایه ای (laminar) باشد (شکل ۲-۱۳). در اینحالت رابطه بین فشار دو سر مقاومت و دبی آن بصورت خطی خواهد بود:

$$\Delta P = R_H \cdot q$$



شکل ۲-۱۳ نمایی از جریان لایه ای و پروفایل سرعت آن

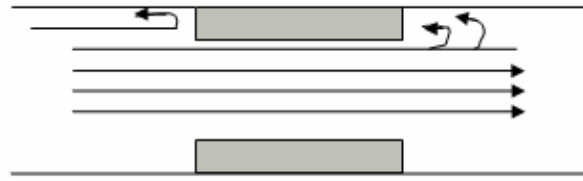
چنانچه میزان جریان (دبی) افزایش یابد ممکن است جریان بصورت مغشوش (Turbulent) شود (شکل ۲-۱۴)، در اینحالت معادلات پیچیده تر و غیر خطی خواهد شد:

$$q = g_H \sqrt{\Delta P}$$

این رابطه با استفاده از روشهایی که قبلا اشاره شده می تواند خطی شود:

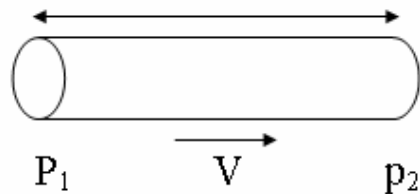
$$q = g_H \Delta P$$

که g_H هدایت هیدرولیکی است.



شکل ۲-۱۴ جریان اغتشاشی

۲-سلف هیدرولیکی **Inertance**: سلف هیدرولیکی نیز مانند سلف الکتریکی ذخیره کننده انرژی است. انرژی در سلف هیدرولیکی به صورت انرژی جنبشی (در جرم سیال) ذخیره می شود. برای بدست آوردن معادلات دینامیکی سلف هیدرولیکی با توجه به شکل ۲-۱۵ بصورت ذیل می توان عمل کرد.



شکل ۲-۱۵ لوله

با توجه به اینکه تفاوت نیروی دو طرف تولید کننده شتاب برای سیال است:

$$F_l - F_r = m \frac{dv}{dt}$$

$$P_l A - P_r A = (\rho V) \frac{dv}{dt}$$

در آن v سرعت، V حجم مایع و ρ جرم چگالی جرمی سیال است.

$$V = Al$$

$$\Delta P = \frac{\rho l}{A} \frac{dq}{dt}$$

$$\Delta P = L_H \frac{dq}{dt}$$

q مقدار حجم گذرنده سیال در زمان است.

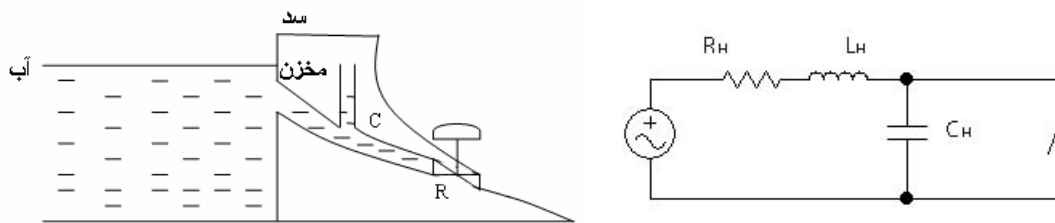
دقت شود که تغییرات حجم :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{A \cdot dl}{dt} = A \cdot v$$

$$q = \frac{dV}{dt} = V \cdot A$$

بدلیل پیوستگی انرژی اگر سیال انرژی جنبشی داشته باشد نمی تواند توقف ناگهانی پیدا کند و اگر با شیر جلوی جریان سیال بطور ناگهانی گرفته شود نیروی زیادی به شیر وارد می شود که مشابه جرقه زدن ولتاژ سلف در قطع ناگهانی جریان سلف است در سدها برای بستن شیر مسیرهای حمل کننده آب چون سرعت و انرژی جنبشی سیال زیاد است اگر شیر ناگهان بسته شود و نیروی زیادی به آن وارد می شود. از روی مدار معادل الکتریک می دانیم که برای گرفتن اثر کلید زنی می توان یک خازن با کلید موازی کرد که در سیستم هیدرولیکی معنای آن قرار دادن یک محفظه بالای شیر است که در حالت قطع کردن شیر آبی که با سرعت حرکت می کند وارد این محفظه بشود و نیروی زیادی به شیر وارد نکند.

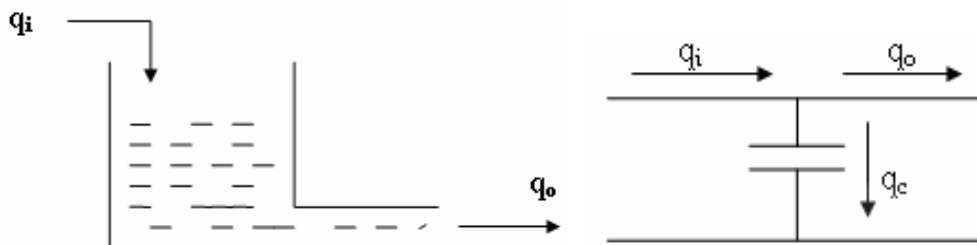
همچنین در یک سد، به یک مخزن عمودی نیاز است که در صورت قطع ناگهانی جریان توسط شیر کنترلی، انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل تبدیل شود (سلف). این اثر که به نام ضربه قوچ معروف است در شکل ۲-۱۶ دیده می شود.



شکل ۲-۱۶ ضربه قوچ و مدل الکتریکی آن

۳-خازن هیدرولیکی : المان دیگر هیدرولیکی که ذخیره کننده انرژی است خازن یا ظرفیت هیدرولیکی است که انرژی را بصورت انرژی پتانسیل ذخیره می کند. مخزن مثالی

است از یک خازن هیدرولیکی که حجم آن می تواند نمایانگر ظرفیت خازن باشد. در شکل ۱۷-۲ مشابهت یک خازن الکتریکی و یک خازن هیدرولیکی مشاهده می شود.



شکل ۱۷-۲ مشابهت خازن هیدرولیکی و خازن الکتریکی

روابط ریاضی برای مخزن فوق بصورت زیر می باشد:

$$q_c = q_i - q_o = A \frac{dh}{dt} = \frac{A}{\rho g} \frac{dp}{dt}$$

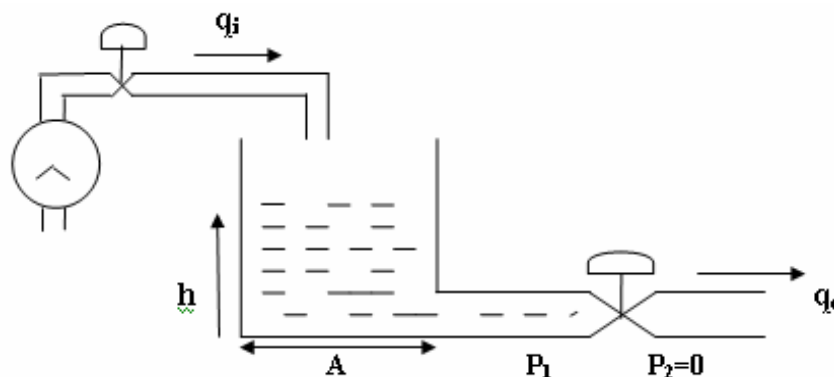
$$\text{فشار } P = \frac{Mg}{A} = \frac{\rho Ahg}{A} = \rho hg$$

M جرم سیال و g ثابت جاذبه می باشد و ρ چگالی جرمی سیال است.

با مقایسه رابطه فوق با رابطه ریاضی یک خازن الکتریکی $i = c \frac{dv}{dt}$ مشاهده می شود که $\frac{A}{\rho g}$ معادل خازن می باشد.

مثال ۲-۶):

یک مدل الکتریکی برای سیستم نشان داده شده در شکل ۱۸-۲ رسم کنید.



شکل ۱۸-۲ مربوط به مثال ۵-۲

حل:

برای این سیستم داریم:

$$q_c = q_i - q_o$$

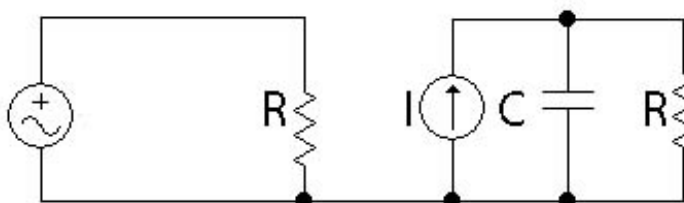
که q_c دبی حجمی سیال در مخزن، q_i دبی ورودی و q_o دبی خروجی است. و با توجه به اینکه V حجم داخل مخزن برابر است با:

$$V = A.h$$

می توان رابطه قبل را بصورت ذیل نوشت:

$$q_c = q_i - q_o = \frac{dV}{dt} = A \frac{dh}{dt}$$

مدل الکتریکی سیستم هیدرولیکی داده شده بصورت شکل ۱۹-۲ قابل رسم است.



شکل ۱۹-۲ مدل الکتریکی برای سیستم شکل ۱۸-۲

د) سیستم حرارتی:

سیستمهای حرارتی شبیه سیستمهای سیالاتی هستند لیکن با تفاوتهای زیادی. متغیرهای اصلی در این سیستمها عبارتند از: دما (متغیر عرضی) و توان حرارتی- دبی حرارتی- (متغیر عبوری). متغیرهای ثانویه (امپدانسهای حرارتی) عبارتند از: مقاومت حرارتی و خازن حرارتی می باشند.

لازم به ذکر است که در سیستمهای حرارتی چون متغیر عبوری، توان حرارتی است و یک المان ذخیره کننده (خازن حرارتی) تعریف می گردد، سلف حرارتی مصداقی در اینگونه سیستمها نخواهد داشت. بنابراین المان پایه سیستمهای حرارتی درجه اول خواهد بود و نه درجه دو. این نکته باعث ساده تر شدن مدارها و سیستمهای حرارتی از جهتی

می گردد. لیکن با توجه به خاصیت تشعشی حرارتی و نحوه انتقال آن، معادلات دینامیکی انتشار حرارت تابع مکان بوده (معادلات مشتقات جزئی) که این مسئله باعث پیچیدگی مدل‌های حرارتی از طرف دیگر می شود. در قسمت‌های بعدی این فصل در این خصوص بیشتر بحث خواهد شد.

روابط ریاضی مقاومت و ظرفیت حرارتی را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\text{الکتريکي} \quad R = \frac{\text{ولت}}{\text{آمپر}} = \Omega \rightarrow \text{حرارتي} \quad R_h = \frac{\text{دما}}{\text{توان}} = \frac{\Delta T}{P} = \frac{oC}{W}$$

$$\text{انرژي} \quad Q = Mc(T_2 - T_1) \xrightarrow{\text{گيري مشتق}} \text{توان} = P = \frac{dQ}{dt} = Mc \frac{d\Delta T}{dt}$$

M جرم ماده و C ظرفیت گرمایی ویژه آن است.

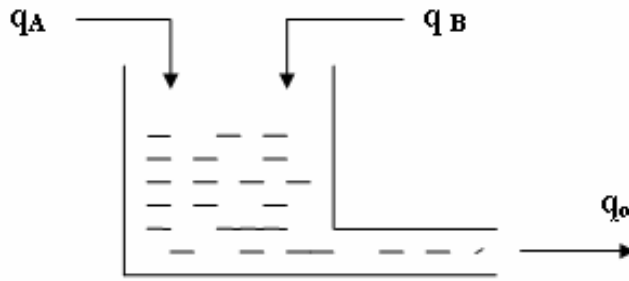
به $Mc = c_T$ ظرفیت حرارتی نیز گفته می شود.

۳- فرآیندهای شیمیایی :

فرآیندهای شیمیایی سیستم‌های دینامیکی هستند که می توان برای آنها از مدل‌های ریاضی استفاده نمود. در اینگونه سیستمها غلظت مواد را می توان متغییر عرضی، و دبی جرم (برای مواد غیر سیال) و دبی حجمی (برای سیالات) را متغییر عبوری در نظر گرفت. حجم مواد نیز نمایانگر ظرفیت می تواند باشد. میل ترکیبی مواد با یکدیگر عاملی هدایتی است که در از بین رفتن مواد اولیه و تولید محصول (محصولات) نهائی نقش بسزائی دارد. از جمله قوانین حاکم بر این فعل و انفعالات اصل بقاء جرم است که می توان از آن استفاده نمود. در ادامه بعنوان مثال برای یک واکنش ساده شیمیایی معادلات دینامیکی (مدل ریاضی) را می نویسیم.

مثال ۲-۷):

روابط ریاضی سیستم مشاهده شده در شکل ۲-۲۰ را که یک واکنش شیمیایی رانشان می دهد بنویسید. مواد A و B با یکدیگر ترکیب شده و ماده D را تولید می کنند(این واکنش دو طرفه است).



شکل ۲۰-۲ مربوط به مثال ۷-۲

حل:

برای سیستم نشان داده شده در شکل ۲۰-۲ داریم:

q : دبی حجمی؛ c : غلظت (دانسیته)؛ ρ : جرم حجمی؛ q_o : دبی خروجی که مخلوطی از D, B, A است. C : دانسیته نسبی، V : حجم مایع. در حالت کلی برای سیستم داریم:



فرض می کنیم: $\alpha = \beta = 1$ پس:

$$r_A^+ = r_B^+ \quad , \quad r_A^- = r_B^-$$

که در آن نرخ تولید ماده A : r_A^+ ؛ نرخ از بین رفتن ماده A : r_A^- می باشد. در نتیجه داریم:

$$r_A = r_A^+ - r_A^-$$

$$r_A = r_B = r = \frac{r_D^+ - r_D^-}{n}$$

بر مبنای اصل بقای جرم:

$$q_A \cdot \rho_A + q_B \cdot \rho_B - q_o \rho = \frac{d(\rho v)}{dt}$$

اصل بقای جرم را برای هر یک از مواد A, B, C می نویسیم:

$$q_A \cdot \rho_A - q_o c_A - rV = \frac{d(C_A V)}{dt}$$

$$q_B \rho_B - q_o c_B - rV = \frac{d(C_B V)}{dt}$$

$$nrV - q_o c_D = \frac{d(C_D V)}{dt}$$

۴- سیستم ترافیکی:

سیستمهای ترافیکی شباهتهای زیادی به سیستمهای سیالاتی و هیدرولیکی دارد. با این تفاوت که جرم انتقال یافته وسایل نقلیه بوده و مسیرهای عبور خیابان، برزگراه، ... می باشند. مشابه با فشار هیدرولیکی می توان فشار ترافیکی را تعریف نمود. این فشار ناشی از تراکم وسایل نقلیه بوده که گاه از آن بعنوان ترافیک نام برده می شود. متغیر متناظر با دبی در این سیستمها را میتوان دبی ترافیکی نامید که منظور تعداد وسایل نقلیه ای است که در واحد زمان از گذرگاه عبور می نماید (مشابه جریان الکتریکی که میزان بار الکتریکی، مثلا الکترون، که در واحد زمان از یک هادی الکتریسته عبور می کند).

در خصوص امپدانسهای ترافیکی، مقاومت ترافیکی، خازن ترافیکی، و سلف ترافیکی قابل تعریف است. مقاومت ترافیکی به شرایط فیزیکی معبر مانند هموار یا نا هموار بودن، عرض، طول، ... آن بستگی دارد. خازن ترافیکی به ظرفیت و گنجایش معبر و گذرگاه یا محل نگهداری وسایل نقلیه (پارکینگ) ارتباط دارد. سلف ترافیکی نیز به جرم و اینرسی وسایل نقلیه بستگی دارد. انرژی ذخیره شده در این سلف، انرژی جنبشی وسایل نقلیه است. روابط ریاضی امپدانسهای فوق را می توان مشابه سیستمهای هیدرولیکی و الکتریکی نوشت.

۵- سایر سیستمهای مرتبط با انسان:

اساساً، سیستمهایی که با انسان ارتباط دارند، سیستمهایی عموماً بسیار پیچیده می باشند. از جمله این سیستمهای میتوان به سیستمهای روانشناسی، اجتماعی، اقتصادی، سیاسی، ... اشاره نمود. علیرغم مطالعات گسترده انجام شده در این موارد از جنبه های مختلف علمی و علوم انسانی، تبیین متغیرهای اصلی و ثانویه و روابط حاکم بر آنها و همچنین مدلسازی کمی و ریاضی آنها از دیدگاه مهندسی در مراحل ابتدائی خود قرار دارد. بعنوان مثال شاید بتوان فشار روحی افراد (استرس) را در سیستمهای روانشناسی، بعنوان متغیر عرضی تعریف نمود، و یا ظرفیت روحی را معادل ظرفیت یک خازن الکتریکی فرض نمود و الی آخر.

روش گراف خطی (Linear graph):

در دنیای واقعی سیستمهای مورد بررسی پیچیده و ترکیبی از زیر سیستمهای مکانیکی، الکتریکی و ... هستند که تعامل و تلفیق آنها بسیار سخت است. یکی از روشهای یکسان نمودن تحلیل این سیستمهای پیچیده و ترکیبی استفاده از گراف خطی است. در این روش کل سیستم (مکانیک، الکتریک، گرمایی و...) به یک صورت نمایش داده می شود که بعداً می توان معادلات را از روی گراف نوشت و سیستم را تحلیل کرد.

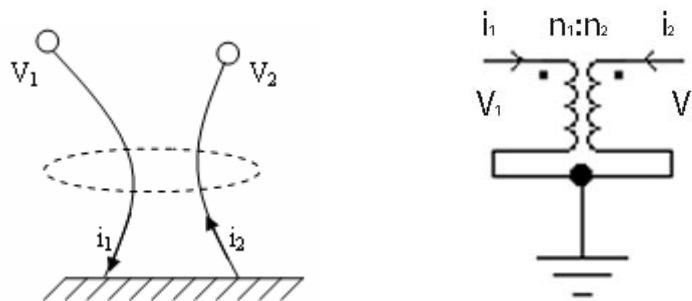
در این روش که یک گراف به سیستم مرتبط می شود و می توان سیستمهای پیچیده را با یک مدار الکتریکی مدل کرده و آن را حل کرد.

مرحله اول و مهم این روش بدست آوردن گره ها می باشد که در آنها با توجه به نوع سیستم متغییر عرضی مقداری مشخص نسبت به مرجع دارد است(ولتاژ گره ها نسبت به گره مبنا).

برای مثال در سیستمهای مکانیکی محل اتصال عناصر به هم بصورت گره در نظر گرفته می شود. در این سیستمها چون تمام ذرات جرم دارای سرعت یکسان هستند پس المان جرم بین دو گره قرار نمی گیرد و بطور مجازی به زمین وصل می شود.

گراف خطی برای ترانسفورماتور، اهرم و چرخ دنده:

با توجه به شکل ۲-۲۱ برای ترانس می توان نوشت:



شکل ۲-۲۱ ترانسفورماتور و گراف لولا شده آن

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{i_1}{i_2}$$

با فرض راندمان ۱۰۰٪ $P_1 = P_2$

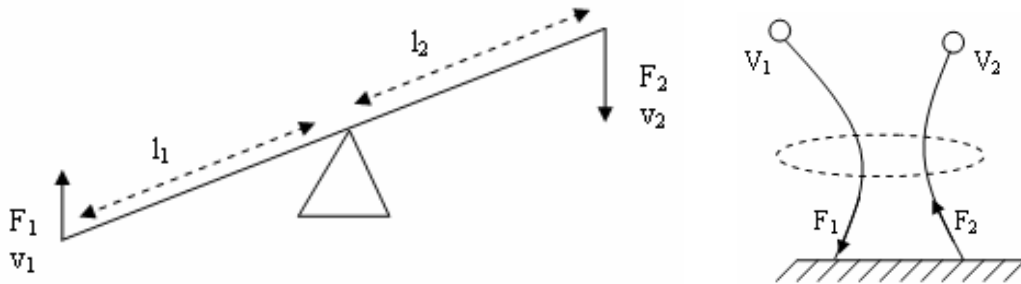
$$V_1 i_1 = V_2 i_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{i_2}{i_1} = \frac{1}{n}$$

اهرم:

برای اهرم‌ها (شکل ۲-۲۲) رابطه گشتاور بصورت ذیل است:

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = T_2 \\ F_1 l_1 = F_2 l_2 \\ \frac{V_2}{V_1} = \frac{l_2}{l_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1} = n$$

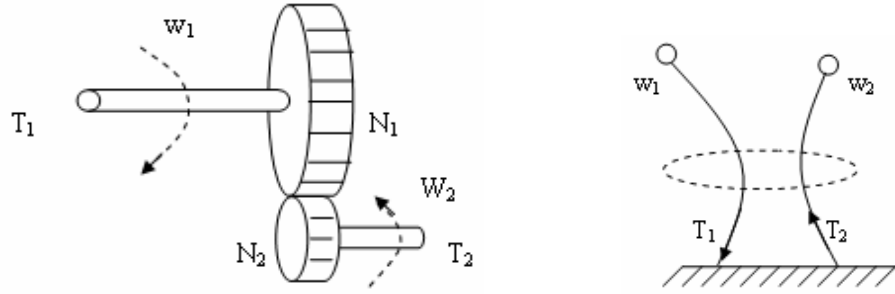


شکل ۲-۲۲ اهرم و گراف خطی آن

مشاهده می شود که معادل الکتریک اهرم، ترانس می باشد.

چرخ دنده:

روابط مربوط به چرخ دنده (شکل ۲-۲۳) بصورت ذیل است:



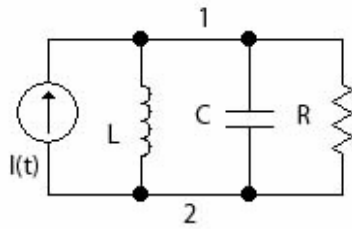
شکل ۲-۲۳ چرخ دنده و گراف خطی آن

$$P_1 = P_2$$

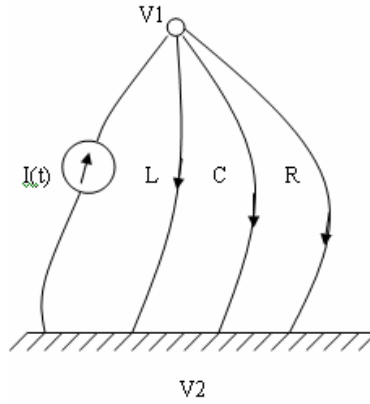
$$T_1 \cdot \omega_1 = T_2 \cdot \omega_2 \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

مثال ۲-۷):

برای سیستم الکتریکی شکل ۲-۲۴ یک گراف رسم کنید.



شکل ۲-۲۴ سیستم الکتریکی مثال ۲-۷



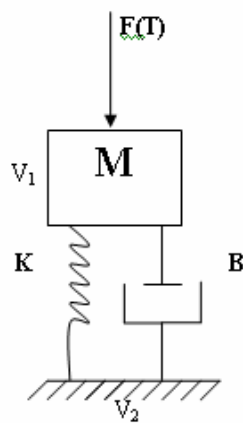
شکل ۲۲-۲ مربوط به مثال ۸-۲

مثال ۲-۸:

برای سیستم شکل ۲۶-۲ یک گراف رسم کنید.

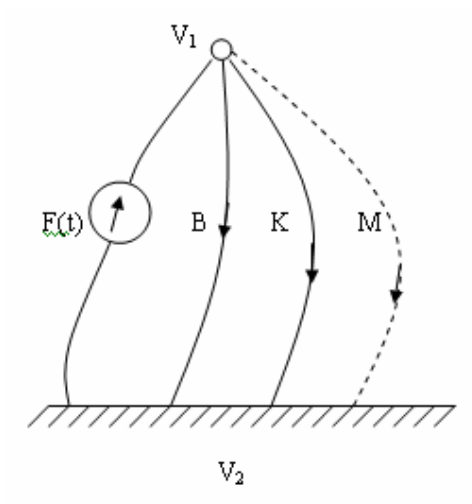
حل:

سیستم را مانند شکل ۱۹-۲ با دو گره در نظر می گیریم.



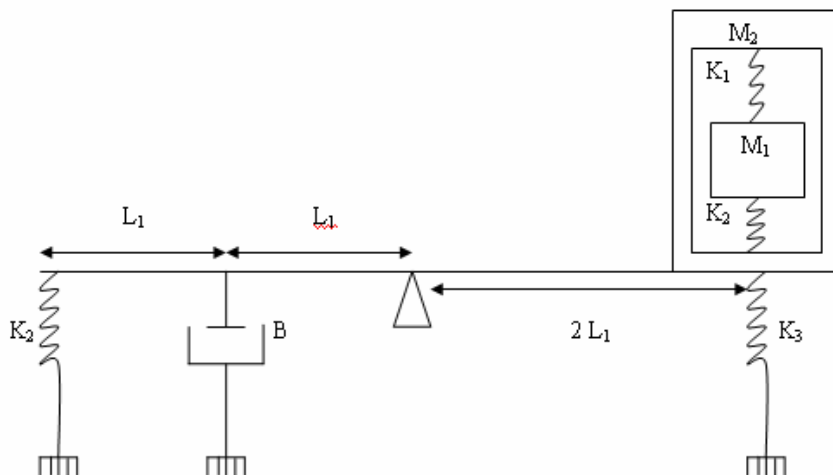
شکل ۲۶-۲ مربوط به مثال ۲-۸

و برای این سیستم گراف را رسم می کنیم.



شکل ۲-۲۳ گراف برای مثال ۲-۸

تمرین ۲-۱: برای سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۲۴ یک گراف رسم کنید.



شکل ۲-۲۴ مربوط به تمرین ۲-۱

۲-۳ بررسی عوامل غیر خطی در مدل‌سازی:

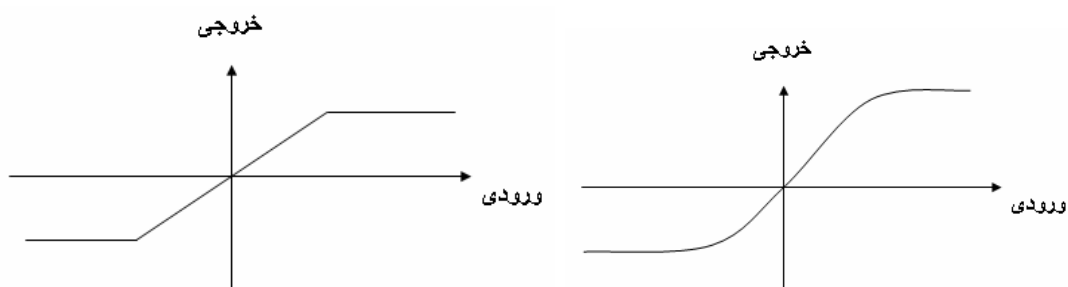
در مدل‌سازی سیستمها باید به عوامل غیر خطی که می‌تواند سیستم را تغییر دهد توجه شود. بعضی از این عوامل به شرح زیر است:

۱) اشباع: (استاتیک)

افزایش خروجی به ازای ورودی تا حد معینی امکان پذیر است، و بعد از آن خروجی با ورودی تغییر نمی‌کند (شکل ۲-۲۵). مانند اشباع هسته ترانس، یا اشباع تقویت کننده خطی OP-Amp و اشباع خیابان که همه باعث خطا در مدل ساده خطی ارائه شده می‌شوند.

یکی از توابع ریاضی مدل کننده اشباع سیگموئید است که در شبکه های عصبی مصنوعی برای نرونها بکار گرفته می شود.

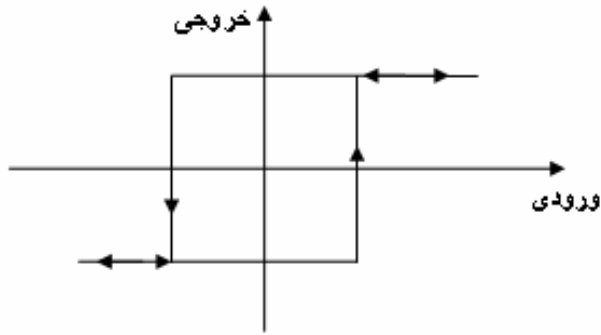
این حالت را می توان در مدل نرونها که در آن از تابع سیگموئیدی به عنوان تابع عملکرد شبکه استفاده می شود مشاهده کرد.



شکل ۲-۲۵ اشباع با تابع تانژانت هیپربولیک (سیگموئید) با تقریب دو خطی آن

۲) هیستریزیس:

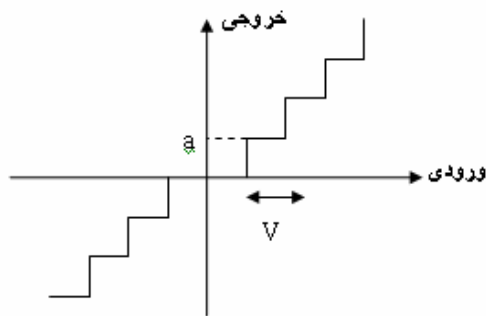
از مشخصه های استاتیک غیر خطی متداول در سیستمها است و به طور ساده می توان بیان نمود که هر گاه مسیر رفت و برگشت ورودی - خروجی یکسان نباشد در آن سیستم هیستریزیس وجود دارد. منحنی شار برحسب جریان در ماشینهای الکتریکی از نمونه های مهم این غیر خطی است (شکل ۲-۲۶).



شکل ۲-۲۶ هیستریزیس به همراه اشباع در سیستم

۳) کوانتیزیشن:

این خطا معمولاً در گسسته سازی سیگنالهای آنالوگ روی می دهد و مقدار آن متناسب با تعداد بیت A/D می باشد (شکل ۲-۲۷).

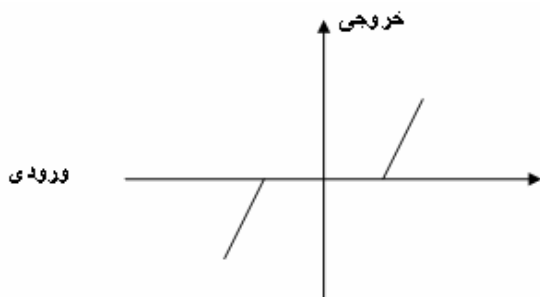


شکل ۲-۲۷ کوانتیزیشن

۴) فضای مرده (Dead zone):

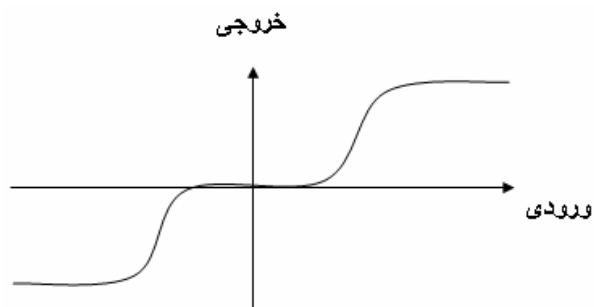
این مدل غیر خطی بر مبنای تولید خروجی هنگامی که ورودی به آستانه ای خاص می رسد تعریف می شود (شکل ۲-۲۸). از جمله مثالهای آن رابطه جریان - ولتاژ دیود و

ماسفت است. در اصطکاک نیز این پدیده دیده می شود. مقدار اصطکاک سکون از حرکت بیشتر است بنابراین مقدار نیروی لازم برای شروع حرکت از مقدار نیروی لازم برای تداوم حرکت بیشتر است.



شکل ۲-۲۸ فضای مرده

باید توجه داشت که یک سیستم می تواند در قسمت غیر خطی ترکیب چند مدل بالا را داشته باشد برای مثال به شکل ۲-۲۹ نگاه شود.



شکل ۲-۲۹ ترکیبی از چند مدل فوق

سیستمهای فشرده و گسترده:

از دیدگاه دیگر سیستمها می توانند فشرده یا گسترده باشند.

۱-سیستم فشرده: در این سیستمها روابط فقط تابع زمان است و محل قرار گرفتن و یا فاصله و ابعاد المانها بر روابط اثری ندارد. به عبارت دیگر تمام اجزاء صرف نظر از مکان در یک لحظه زمان موج عبوری را می بینند. برای مثال در یک مدار الکتریکی هنگامی که فرکانس 1KHz باشد طول موج (λ) برابر میشود.

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{1000} = 300\text{km}$$

C سرعت حرکت موج و f فرکانس آن می باشد. مشاهده می شود که مسافت پیموده شده در یک سیکل زمانی 300 کیلومتر است پس اجزاء مدار که در گستره چندین سانتی متر هستند همه یک زمان موج را رویت می کنند و محل مکانی مهم نسبت در یک سیستم مخابراتی اگر در آنتن فرکانس 100MHz باشد داریم:

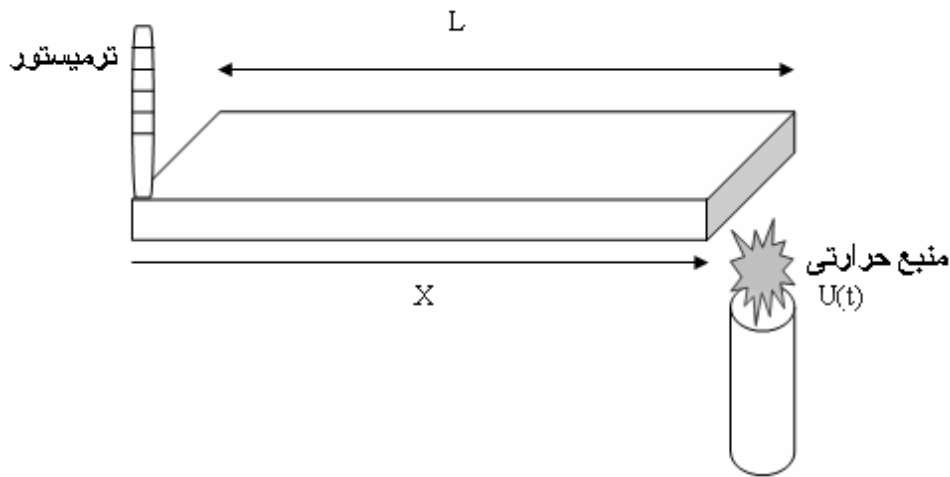
$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 3\text{m}$$

مشاهده می شود که طول آنتن مهم است و سیگنال عبوری از آنتن فقط تابع زمان نیست و به طول آنتن نیز وابسته است (سیستم گسترده)

مثال این نوع از سیستمها معادلات دیفرانسیل و دیفرانس می باشد.

۲-سیستمهای گسترده: در این سیستمها روابط تابع زمان و مکان می باشد و به عبارت کلی تر روابط تابع چندین پارامتر می باشد. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بارزی از این نوع سیستمها می باشد. سیستمهای انتقال حرارت و ارتعاشات نمونه ای از سیستمهای گسترده می باشند.

مثال ۲-۹): روابط انتقال گرما از منبع به ترمیستور را در شکل ۲-۳۰ تعیین و محاسبه نمایید.



شکل ۲-۳۰ مربوط به مثال ۲-۹

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 h(t, x)}{\partial x^2}$$

k ضریب هدایت حرارتی می باشد.

شکل ۲-۳۰ نمایش سیستم انتقال گرما

برای این سیستم شرایط مرزی بصورت ذیل است:

$$\left. \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} \right|_{x=L} = K U(t)$$

برای حل این معادلات دو روش وجود دارد:

$$\frac{\partial^2 h(t, x)}{\partial x^2} = \frac{h(t, x + \Delta x) - 2h(t, x) + h(t, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad \text{-روش عددی حل}$$

استفاده از تعاریف مشتق عددی و جایگذاری آنها در معادله اصلی

-استفاده از حل لاپلاس: با فرض ثابت بودن x از معادلات برحسب زمان تبدیل لاپلاس

می گیریم:

$$SH(s, x) = kH''(s, x)$$

دقت شود که مشتق رابطه فوق برحسب x می باشد. جواب معادله دیفرانسیل برحسب x

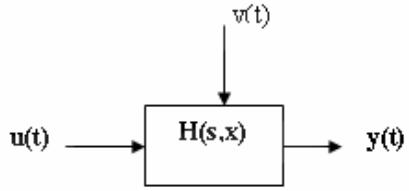
می شود:

$$H(s, x) = A(s)e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}} + B(s)e^{x\sqrt{\frac{s}{k}}}$$

از شرایط مرزی بدست می آید:

$$A(s) = B(s) = \frac{K U(s)}{\sqrt{\frac{s}{k}}(e^{L\sqrt{\frac{s}{k}}} - e^{-L\sqrt{\frac{s}{k}}})}$$

برای ترمیستور می توان نوشت:



شکل ۲-۳۱ سیستم در نظر گرفته شده برای ترمیستور

$$y(t) = h(t, 0) + V(t)$$

$V(t)$ نویز اندازه گیری است:

$$y(s) = H(s, x) \Big|_{x=0} + V(s)$$

اگر v قابل صرف نظر کردن باشد:

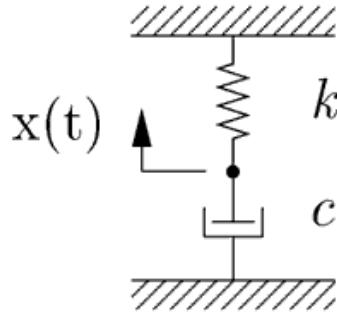
$$G(s) = \frac{H(s, x) \Big|_{x=0}}{U(s)} = \frac{2k}{\sqrt{\frac{s}{k}} (e^{L\sqrt{\frac{s}{k}}} - e^{-L\sqrt{\frac{s}{k}}})}$$

تابع تبدیل ترمیستور

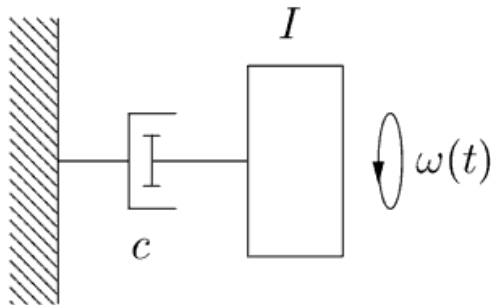
مسائل

۱- مدل‌های الکتریکی سیستم‌های زیر را بدست آورید.

(الف)



(ب)



(ج)

