مرجع: کتاب شبیه‌سازی سیستم‌های پیشامد گسسته

(1)

آزمایش مدلهای آماری

- توزیع پواسن

$$P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-a}a^{x}}{x!} & x=0,1,\dots \\ 0 & \text{نقاط دیگر} \end{cases}$$

- توزیع مربع کای

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$E_i = np_i$$

$$t = \frac{\bar{X} - x_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{توزیع } t$$

فصل ۹ - طراحی مدل معتبر از داده‌های ورودی:

۱ - گردآوری داده‌های خام

۲ - تعیین توزیع آماری (تهیه نمودار فراوانی - یا هیستوگرام)

۳ - برآوردهایی در مورد پارامترهای مشخص کننده توزیع

۴ - آزمون آماری توزیع فرضی بدست آمده

برآورد پارامترهای توزیع: ۱- توزیع نرمال

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i^2) - n\bar{X}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

اگر توزیع فراوانی در دست باشد:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j X_j}{n}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j X_j^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

جدول ۹-۶ - صفحه ۴۷۲ برآورد پارامترها را برای سایر توزیعها ارائه می‌دهد.

پواسون $\longrightarrow \hat{a} = \bar{X}$

نمایی $\longrightarrow \hat{\lambda} = \dfrac{1}{\bar{X}}$

⋮

مثال ۱۰-۲ (صفحه ۵۲۸) -

متغیرهای اتفاقی:

آهنگ ۴۵ تقاضا در ساعت (توزیع پواسن) $x_{11}, x_{12}, \dots x_{1n}$

مدت ارائه خدمت (توزیع نرمال) $x_{21}, x_{22}, \dots x_{2n}$ $N(1.1, 0.2^2)$ دقیقه

اتوبانک Y_1 (Z_1) میزان عبور

متوسط مدت انتظار Y_2 (Z_2)

بیشترین طول صف Y_3 (Z_3)

② جدول ۱۰-۲ ناشی از شبیه‌سازی

در آزمایش عملی به $Z_2 = 4.\bar{3}$ دقیقه رسیدیم. آیا مدل می‌تواند پاسخ مشابه داشته باشد

	Y_4 تعداد ورود در ساعت	Y_5 میانگین خدمت	Y_2 متوسط مدت تأخیر (دقیقه)	Y_2 تصحیح شده
1	۵۱	۱,۰۷	۲,۷۹	۵,۳۷
2	۴۰	۱,۱۲	۱,۱۲	۱,۹۸
3	۴۵,۵	۱,۰۶	۲,۲۴	۵,۲۹
4	۵۰,۵	۱,۱۰	۳,۴۵	۳,۸۲
5	۵۳	۱,۰۹	۳,۱۳	۶,۷۴
6	۴۹	۱,۰۷	۲,۳۸	۵,۴۹
		میانگین	۲,۵۱	4.78
		انحراف معیار	۰,۸۲	1.66

$$H_0 = E[Y_2] = 4.3 \quad (\mu_0)$$

$$H_1 = E[Y_2] \neq 4.3$$

1. $\alpha = 0.05, \quad n = 6$

2. $\bar{Y}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{2i} = 2.51$

$$S = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_{2i} - \bar{Y}_2)^2}{n-1} \right)^{1/2} = 0.82$$

مشتق از توزیع نرمال پیروی نمی‌کند ←

3. $t_0 = \dfrac{\bar{Y}_2 - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{2.51 - 4.3}{0.82/\sqrt{6}} = -5.3$

$$t_{\alpha/2;n-1} \xrightarrow{\text{از جدول پ-۴}} 2.57$$

اگر شرط $|t_0| > t_{\alpha/2;n-1}$ ⇐ فرضیه H_0 رد می‌شود.

خطای نوع اول: $P(H_0 \text{ رد} \mid H_0 \text{ صحیح باشد}) = \alpha$

تصحیح مدل ⇐ جدول ۱۰-۳ (صفحه ۵۳۶) (سرویس به پیاده)

1. $\alpha = 0.05, \quad n = 6$

2. $\bar{Y}_2 = 4.78, \quad S = 1.66 \quad , t$

3. $t_{0.025;5} = 2.571$

4. $t_0 = 0.710 < 2.571 \longrightarrow$ نمی‌توان H_0 را رد کرد (قبول موقت یا ضعیف مدل)

$$\delta = \frac{|E(Y_2) - \mu_0|}{\sigma}$$

$\sigma \swarrow s$ β با δ متناسب است

خطای نوع اول ←

خطای نوع دوم

مخاطره‌ها	تعبیر آماری	تعبیر مدل‌سازی
α	رد H_0 علی‌رغم صحت آن	رد مدل معتبر
β	پذیرش H_0 علی‌رغم صحت H_1	رد نکردن مدل نامعتبر

آزمون واریانس :

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_1^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_1^2 \end{cases}$$

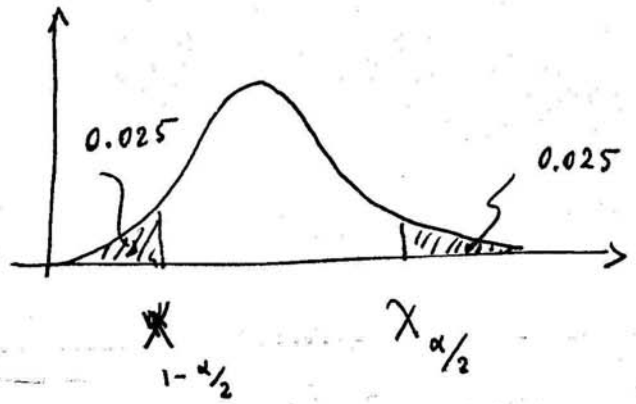
$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

که دارای تابع توزیع مربع کای با درجه آزادی $n-1$

مثال: در یک جامعه ادعا شده است که واریانس برابر ۱۰۰ است ($\sigma = 10$) می‌خواهیم با اطمینان ۹۵٪ این ادعا را آزمایش نماییم. یک نمونه ده تایی گرفته و s^2 را از رابطهٔ $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ محاسبه می‌نماییم

($s^2 = 195$)

درجه آزادی $n-1 = 10-1 = 9$



جدول $\Rightarrow$ $\chi_{0.025} = 19$

$\chi_{0.975} = 2.7$

$\chi_0 = \frac{9 \times 195}{100} = 17.55 < 19 \Rightarrow$ H_0 قبول می‌شود.

مقایسه واریانس دو جامعه :

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

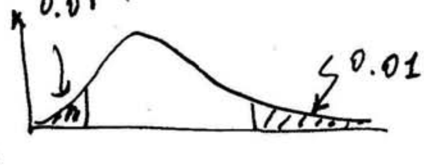
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

که دارای توزیع F با درجه آزادی n_1-1 و n_2-1

مثال: از یک متغیر تصادفی در دنیای واقعی $n_1 = 16$ نمونه گرفته‌ایم و $S_1 = 9$ گردید.

از یک برنامهٔ شبیه‌سازی $n_2 = 25$ " " و $S_2 = 18$ محاسبه شد.

آیا با اطمینان ۹۸٪ می‌توان گفت که واریانس‌های دو جامعه باهم برابر هستند :



$F_{0.01}(15,24) = 2.89$ ، درجه آزادی ۱۵ و ۲۴

$F_{0.99}(15,24) = \frac{1}{F_{0.01}(24,15)} = 0.3$

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \left(\frac{9}{12}\right)^2 = 0.57 \longrightarrow H_0 \text{ قبول می‌گردد}$$

آزمون تابع توزیع:

۱) روش کای مربع

۲) روش کولموگروف - اسمیرنوف Kolmogrov-Smirnos (است)

H_0 : متغیر تصادفی x دارای تابع چگالی $f(x)$ است

H_1 : $f(x)$ ... نیست

تعداد متغیر تصادفی مشاهده شده در فاصلهٔ i ام (از هیستوگرام به دست می‌آید)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

تعداد متغیر تصادفی مورد انتظار در فاصلهٔ i ام اگر $f(x)$ درست باشد.

با درجه آزادی $K - r - 1$

K: تعداد فاصله‌ها

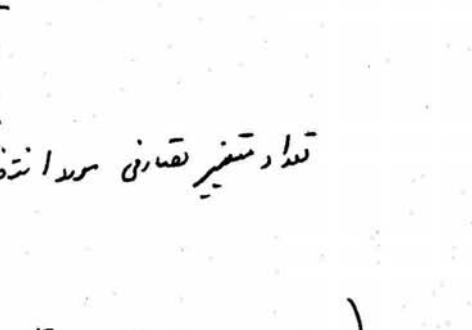
r: تعداد پارامترهای تخمین زده شده $f(x)$

$(r_{\text{نمایی}} = 1,\ r_{\text{استاندارد}} = 0,\ r_{\text{نرمال}} = 2, \ldots)$

مثال: ادعا شده است که یک مولد متغیر تصادفی با تابع توزیع یکنواخت استاندارد بین ۰ و ۱ داریم. فرض کنیم ۱۰۰ نمونه گرفته‌ایم. فاصله بین ۰ و ۱ را به ۱۰ قسمت کرده و تعداد مشاهدات را در جدول وارد می‌نماییم.

فاصله‌ها	O_i	E_i	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
0 – 0.1	۸	10	0.4
0.1 – 0.2	۸	10	0.4
0.2 – 0.3	10	10	0
0.3 – 0.4	9	10	0.1
0.4 – 0.5	۱۲	10	0.4
0.5 – 0.6	۸	10	0.4
0.6 – 0.7	10	10	0
0.7 – 0.8	۱۴	10	1.6
0.8 – 0.9	10	10	0
0.9 – 1	۱۲	10	0.1

مجموع = ۳٫۴



$\chi^2_{0.05} = 16.9$

H_0 : $f(x)$ یکنواخت استاندارد است

H_1 : $f(x)$ ... نیست

$K = 10,\ r = 0 \Rightarrow$ درجه آزادی $= 10 - 0 - 1 = 9$

$\chi^2_\alpha = 16.9$

بنابراین فرض رد نمی‌شود.